オーディオ EQ バイクアッドフィルタ係数計算式の手引き

by Robert Bristow-Johnson

全てのフィルタ伝達関数はアナログフィルタのプロトタイプ（下記参照）から導かれたもので、双 1 次 z 変換によって離散化されている。重要な周波数の場所とバンド幅の調整のため、双 1 次 z 変換の周波数ワーピングが考慮されている。

まずバイクアッドフィルタの伝達関数を以下のように定義する。

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

アーキテクチャに依存するため、この式では 5 個でなく 6 個のフィルタ係数を示している。大抵 b_0 か b_0 を 1 に正規化する（かトータルでのゲイン係数としてまとめる）だろう。したがって伝達関数は、

$$H(z) = \frac{\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_1} z^{-1} + \frac{b_2}{a_0} z^{-2}}{1 + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{-2}}$$

または

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} + \frac{b_2}{b_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0}}$$

となる。最も直接的な実装は 2 番目の式から、

$$y[n] = \frac{b_0}{a_0} x[n] + \frac{b_1}{b_0} x[n-1] + \frac{b_2}{b_0} x[n-2] - \frac{a_1}{a_0} y[n-1] - \frac{a_2}{a_0} y[n-2]$$

となる。

さて、パラメータを以下のように与える。

- F_s（サンプリング周波数 [Hz]）: サンプリングレートを指定
- f（何かがおこる周波数 [Hz]）: 中心周波数、コーナー周波数、シェルフの中点周波数など。フィルタタイプに依存
- G（ゲイン [dB]）: ピーキングとシェルビングタイプのみで使用
- W（バンド幅 [オクターブ]）BPF やノッチでは-3dB となる周波数の間隔。ピーキングタイプではゲインが半分になる周波数の間隔
- Q : 電気工学での定義どおり
- S :「シェルフスロープ」パラメータ。$S = 1$ の時シェルフスロープは得られる最高の急角度で、ゲインが周波数に対して単調増加または単調現象する。

まず始めに、いくつかの媒介変数を計算しておく。

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{10^{G/20}} = 10^{G/40} \\
\omega &= \frac{2\pi f}{F_s} \\
\mathrm{sn} &= \sin(\omega) \\
\mathrm{cs} &= \cos(\omega)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathrm{sn}}{2Q} \\
&= \mathrm{sn}\sinh(\frac{\ln 2}{2} W \frac{\omega}{\mathrm{sn}}) \qquad Q \text{ の代わりにバンド幅が指定されている場合} \\
\beta &= \frac{\sqrt{A}}{Q} \qquad \text{シェルビングタイプ EQ の時のみ} \\
&= \sqrt{A}\sqrt{(A + \frac{1}{A})(\frac{1}{S} - 1) + 2} \qquad \text{シェルフスロープが定義されている場合} \\
&= \sqrt{\frac{A^2+1}{S} - (A-1)^2}
\end{aligned}
$$

そして、望むフィルタタイプの係数を計算する。

アナログプロトタイプは正規化された周波数で表現されている。双 1 次変換の代入は以下のとおり。

$$
s \leftarrow \frac{1}{\tan\frac{\omega}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}
$$

LPF

$$
H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1}
$$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= (1 - \mathrm{cs})/2 \\
b_1 &= 1 - \mathrm{cs} \\
b_2 &= (1 - \mathrm{cs})/2 \\
a_0 &= 1 + \alpha \\
a_1 &= -2\mathrm{cs} \\
a_2 &= 1 - \alpha
\end{aligned}
$$

HPF

$$
H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1}
$$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= (1 + \mathrm{cs})/2 \\
b_1 &= -(1 + \mathrm{cs}) \\
b_2 &= (1 + \mathrm{cs})/2 \\
a_0 &= 1 + \alpha \\
a_1 &= -2\mathrm{cs} \\
a_2 &= 1 - \alpha
\end{aligned}
$$

BPF

$$
H(s) = \frac{\frac{s}{Q}}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1}
$$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \alpha \\
b_1 &= 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\alpha \\
a_0 &= 1+\alpha \\
a_1 &= -2\mathrm{cs} \\
a_2 &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

ノッチフィルタ

$$H(s) = \frac{s^2+1}{s^2+\dfrac{s}{Q}+1}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1 \\
b_1 &= -2\mathrm{cs} \\
b_2 &= 1 \\
a_0 &= 1+\alpha \\
a_1 &= -2\mathrm{cs} \\
a_2 &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

ピーキング EQ

$$H(s) = \frac{s^2+s\dfrac{A}{Q}+1}{s^2+\dfrac{s}{AQ}+1}$$

$$\begin{aligned}
b0 &= 1+\alpha A \\
b1 &= -2\mathrm{cs} \\
b2 &= 1-\alpha A \\
a0 &= 1+\alpha/A \\
a1 &= -2\mathrm{cs} \\
a2 &= 1-\alpha/A
\end{aligned}$$

ローシェルフ

$$H(s) = A\frac{A+\beta s+s^2}{1+\beta s+As^2}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= A[(A+1)-(A-1)\mathrm{cs}+\beta\mathrm{sn}] \\
b_1 &= 2A[(A-1)-(A+1)\mathrm{cs}] \\
b_2 &= A[(A+1)-(A-1)\mathrm{cs}-\beta\mathrm{sn}] \\
a_0 &= (A+1)+(A-1)\mathrm{cs}+\beta\mathrm{sn} \\
a_1 &= -2[(A-1)+(A+1)\mathrm{cs}] \\
a_2 &= (A+1)+(A-1)\mathrm{cs}-\beta\mathrm{sn}
\end{aligned}$$

ハイシェルフ

$$H(s) = A\frac{1+\beta s + As^2}{A+\beta s + s^2}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= A[(A+1)+(A-1)\mathrm{cs}+\beta\mathrm{sn}] \\
b_1 &= -2A[(A-1)+(A+1)\mathrm{cs}] \\
b_2 &= A[(A+1)+(A-1)\mathrm{cs}-\beta\mathrm{sn}] \\
a_0 &= (A+1)-(A-1)\mathrm{cs}+\beta\mathrm{sn} \\
a_1 &= 2[(A-1)-(A+1)\mathrm{cs}] \\
a_2 &= (A+1)-(A-1)\mathrm{cs}-\beta\mathrm{sn}
\end{aligned}$$